#79. $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^3y-xy^3}{x^2+y^2}, & \text{if } (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & \text{if } (x,y)=(0,0)\end{cases}$

(b) Find
(c) $f_x(x,y)=\begin{cases}\_\_\_\_, & (0,0)\text{ 以外}\\ 0, & (0,0)\end{cases}$, $f_y(x,y)=\begin{cases}\_\_\_\_, & (0,0)\text{ 以外}\\ 0, & (0,0)\end{cases}$

(d) Show that $f_{xy}(0,0)=-1\neq 1=f_{yx}(0,0)$

(e) 與 Clarrut's Thm 有相違背嗎？說明之！

Sol: $(x,y)\neq(0,0)$

(b)

$$f_x(x,y)=\frac{(3x^2y-y^3)(x^2+y^2)-2x(x^3y-xy^3)}{(x^2+y^2)^2}=\frac{x^4y+4x^2y^3-y^5}{(x^2+y^2)^2}$$ $x=0,\ y=h$

同理可得 $f_y=\dfrac{x^5-4x^3y^2-xy^4}{(x^2+y^2)^2}$ $x=h,\ y=0$

(原 f $x\leftrightarrow y$ 差一个负号
故 f_y 把 f_x 中 $x\leftrightarrow y$ 也差一个负号)
小观察

(c) 在 (0,0) 处

$$f_x(0,\underset{\text{固定}}{0})=\lim_{h\to0}\frac{f(h,0)-f(0,0)}{h}=\lim_{h\to0}\frac{0}{h}=0$$

同理可得 $f_y(0,0)=0$

(d)
$$\underset{\text{对y微}}{\boxed{f_x}}{}_y(\underset{\text{固定}}{0},0)=\lim_{h\to0}\frac{f_x(0,h)-f_x(0,0)}{h}=\lim_{h\to0}\frac{\frac{-h^5}{h^4}-0}{h}=-1$$

$$\underset{\text{对x微}}{\boxed{f_y}}{}_x(0,\underset{\text{固定}}{0})=\lim_{h\to0}\frac{f_y(h,0)-f_y(0,0)}{h}=\lim_{h\to0}\frac{\frac{h^5}{h^4}-0}{h}=1$$

(e) $(x,y)\neq(0,0)$ $\quad f_{xy}(x,y)=\dfrac{x^6+9x^4y^2-9x^2y^4-y^6}{(x^2+y^2)^3}$

$(x,y)\to(0,0)$ along y-axis, $f_{xy}(0,y)=-1\longrightarrow -1$

$(x,y)\to(0,0)$ along x-axis, $f_{xy}(x,0)=1\longrightarrow 1$

$\therefore \lim_{(x,y)\to(0,0)} f_{xy}(x,y)$ DNE 故 f_{xy} is Not conti at (0,0)，不可使用 Clarraut's Thm，故不違反 Thm. #